

**Instituto de Educación Cristiana
Institute for Christian Teaching**

**INTEGRACION FE Y ENSEÑANZA EN MATEMATICAS
(CASO: RELACIONES Y FUNCIONES)**

**Jorge P. Maquera Sosa
Departamento de Educación
Misión del Lago Titicaca
Puno - Perú**

**313-98 Institute for Christian Teaching
12505 Old Columbia Pike
Silver Spring, MD 20904**

**Preparado para
el 21 Seminario sobre Integración de Fe y Enseñanza
realizado en la Universidad Adventista de Bolivia
18 - 30 de Enero, 1998.**

INTEGRACION FE Y ENSEÑANZA EN MATEMATICAS (CASO:RELACIONES Y FUNCIONES)

INTRODUCCION

Este ensayo pretende dar ideas a los profesores que enseñan Matemáticas, ciencia considerada por los estudiosos como una de las materias mas difíciles de integrarla con la Fe. Consideramos que este trabajo quizá respalde esta hipótesis, pero a la vez tenemos la firme convicción que se debe unir esfuerzos para acercarnos a una integración razonable. Los tópicos que consideramos en nuestro ensayo son las herramientas básicas para el calculo superior, como son las relaciones y funciones de variable real.

En la actualidad las matemáticas están bien estructuradas de tal manera que nos atreveríamos a decir que en esta se puede ver una especie de reflejo del pensamiento divino que crea el universo.

Este sentimiento nos anima a encontrar un derrotero que nos conduzca a un elevado grado de integración. Algunos matemáticos y filósofos vieron en las matemáticas aspectos espirituales lo que indica que se puede lograr esta integración. A continuación mencionaremos el sentir de algunos:

“La Matemática honra el espíritu humano”

Leibniz

"En la teoría matemática, como en todo lo demás, la belleza puede ser percibida pero no explicada"

Arthur Cayley

"Las leyes de la naturaleza son solo pensamientos matemáticos de Dios"

Kepler

"La Matemática es el mas maravilloso instrumento creado por el genio del hombre para el descubrimiento de la verdad"

Laisant

Concluimos que todo intento de integrar la fe con la enseñanza no podrá darse si no llevamos al alumno a internalizar el valor Fe.

LENGUAJE MATEMATICO

Considerando que este ensayo esta dirigido a los profesores de la materia de matemáticas y pensando en ejemplos de aplicación de conceptos de relaciones y funciones de variable real, nos parece necesario recordar que el lenguaje que utiliza la matemática para relacionar todos sus entes, es un lenguaje natural. Por este motivo consideramos que se puede integrar en cierto grado con los conceptos cristianos y lograr que el alumno, en un proceso de razonamiento, concluya integrando en cierto grado la matemática con la Fe.

Daremos un ejemplo: "En un sentido mas profundo la Fe va nutriéndose al relacionarnos personalmente con Dios, a través de la oración, el estudio de su palabra, la contemplación de la naturaleza, el servicio desinteresado a favor de otros, la vida religiosa en comunidad"(H.Rasi). Esta expresión utiliza la palabra relación y se puede observar claramente una función con sus variables dependiente e independiente, donde la Fe es la variable dependiente y todas las actitudes que se mencionan las consideramos como variable independiente. Existen otros ejemplos que quizá podrían representar mejor lo que planteamos.

LENGUAJE VISUAL

El tema de relaciones y funciones debe darse acompañado de gráficos porque tienen un impacto visual. También manifiesta información que puede no ser evidente a partir de descripciones verbales. Edgar Guest dijo "Me gustaría mas ver un sermón que escuchar uno un día de estos". En este sentido podríamos aseverar que todo intento de integrar la fe con la enseñanza en cierto nivel debe pasar por considerar el aspecto visual de los alumnos.

Felizmente todo en matemática puede ser graficado. Gerónimo decía "La matemática posee una fuerza maravillosa capaz de hacernos comprender muchos misterios de nuestra Fe". Así mismo Charles Betz dice "También Jesús reconoció el valor del refuerzo visual, la mayor parte de sus enseñanzas fue al aire libre. Muchas veces usó las cosas de la naturaleza y los eventos diarios de la vida para ilustrar sus lecciones. Justamente había un sembrador sembrando el grano en una colina distante, cuando Jesús comenzó su lección diciendo: El sembrador salió a sembrar. En los cuatro evangelios se registran 61 ocasiones en que Jesús utilizó ilustraciones como ayudas de enseñanza". El aspecto visual es importantísimo para explicar y enseñar relaciones y funciones. Los profesores de diversos continentes han reconocido la importancia de reforzar la enseñanza con ayudas visuales. Jesús enseñaba realidades concretas para enseñar verdades abstractas. El método de la matemática es un método inductivo, el mismo método que usó Jesús.

Creemos que al enseñar relaciones y funciones partiendo de aspectos de la vida cristiana y apoyándonos en los gráficos obtendremos triple provecho. Para esto debemos partir de realidades concretas donde se usan expresiones como "relacion", "dominio", "imagen", "espacio", "funciones", "reales", "punto" etc.

Los beneficios que obtendremos serán:

1. El alumno se mantendrá durante toda la clase en actitud de aprender.
2. La fijación de los conceptos en la memoria de los alumnos será mucho mejor.
3. Las realidades concretas de los alumnos los harán concluir en verdades abstractas en el área espiritual.

Al respecto Charle Schultz dice:

1. Una ayuda visual asegura la atención. Un profesor que grafique un círculo en el pizarrón conseguirá la atención, y la atención es la primera ley del aprendizaje.
2. Una ayuda visual colabora para mantener el interés. El profesor que conceptualiza las ideas con figuras simbólicas, mantendrá el interés de los alumnos.
3. La ayuda visual continuará enseñando por mucho tiempo después que la clase terminó.

Teniendo esto en mente nuestra sugerencia es que a partir de problemas concretos e interesantes, el alumno sea capaz de construir e interpretar gráficos con relaciones y funciones; siendo que las presentadas deben reportarse al universo más próximo del alumno. Esta actividad nos permitirá complementar la enseñanza en los aspectos de clasificación y ordenación.

CONTEXTO DONDE SE DESARROLLA LAS RELACIONES Y FUNCIONES DE VARIABLE REAL.

Cuando estudiamos el tema de relaciones y funciones de variable real trabajamos con números que están en \mathbb{R}^2 , lo que implica que el espacio donde desarrollaremos nuestro estudio estará en el infinito. Cantor a demostrado que de cualquier manera que se trate de numerar todos los números reales, siempre quedarán otros no numerados. En este sentido él concluyó que el conjunto de números reales no es numerable. Necesariamente tenemos que ubicar al estudiante en lo abstracto que es infinito; lo que nos lleva a pensamientos que jamás hemos imaginado y ubicarnos en la Cosmovisión Cristiana. Veremos a continuación tres clases de infinito o innumerable que necesariamente llevará a nuestros alumnos a converger en la realidad de la nada y sí reconocerán a Dios como el que está en medio nuestro y está mas allá del universo.

Estudiaremos este punto de tal manera que el concepto de número y espacio en una transición natural, nos ayudará a comprender al concepto de función.

El infinito es una concepción de mentes finitas que caen rendidas al significado de éste; pero se presenta a nosotros en diversas formas, que podemos concebir mediante imágenes reales.

CLASES DE INFINITO

EL INFINITO ESPACIAL

En una noche de cielo despejado, levantamos nuestra mirada al cielo desde que todos nosotros conocemos la enorme lejanía que separa a los astros; el espectáculo del cielo límpido en una noche sin luna revela al hombre más ignorante, al más desprovisto de toda intuición numérica, la presencia, entre los rayos luminosos que unen su ojo con las estrellas brillantes, de abismos ilimitados en los que la mirada se pierde sin encontrar nunca objeto visible. El infinito espacial es el infinito concreto, sensible inmediato.

A estos infinitos de la inmensidad, el matemático da una significación más analizada, más precisa y, en compensación, completamente despojada de toda resonancia afectiva y sentimental. Para él, el infinito del universo se afirma de este modo: cualquiera que sea la unidad de distancia adoptada, metro, kilómetro, circunferencia de la Tierra, diámetro de su órbita, año-luz, etc., por grande que sea esta unidad, por grande que sea el número que podamos concebir de longitudes colocadas una después de otra, todas iguales A LA unidad elegida, la profundidad de los espacios celestes sobrepasará siempre a la distancia mayor que nuestra imaginación nos haya brindado.

EL INFINITO DEL TIEMPO

Otro infinito de la inmensidad, de naturaleza más abstracta pero no obstante igualmente común a las meditaciones más rudimentarias, es el infinito del tiempo, la eternidad " que no ha tenido comienzo y que jamás tendrá fin".

De igual modo, el infinito del tiempo se atenderá de esta manera: eligiendo una unidad de cualquier longitud, hora, año, siglo, si agregamos unos después de otros intervalos de duración iguales a la unidad convenida en número tan elevado como podamos concebir, el infinito doble del tiempo significa que el curso de las épocas franqueará este inmenso plazo extendido en el porvenir o remontando el pasado.

Estos infinitos, el del espacio y el del tiempo, embargan el alma de emoción, de desazón, de inquietud. La persona y la vida humana se sienten tan reducidas en su dimensión y en su duración, convertidas ambas en puntos imperceptibles dentro de la escala del mundo y de sus épocas! El sentimiento de la insignificancia y la vanidad de nuestro ser nos abrumba. Nos

condenaría a una angustia inconsolable si no tuviéramos la esperanza de la vida eterna.

EL INFINITO DE LA PEQUEÑEZ.

Este infinito, que no nos es sugerido por nuestros sentidos, pero al cual el genio de Pascal conduce a los espíritus más alejados de las concepciones del análisis numérico por medio de imágenes cuyas sorprendentes intuiciones conforman hasta cierto punto la física actual. Después de haber trazado el cuadro de las inmensidades siderales, del orden de las revoluciones planetarias realizadas alrededor de astros que representan otros tantos soles, Pascal invita a su lector a recoger su pensamiento explayado para concentrar su meditación sobre la imperceptible pata de un insecto. Descubre en esta ínfima parcela una repetición del mundo estelar con sus soles y sus cortejos de planetas.

Pero aquí aparece el matemático, en estos planetas de dimensiones inconcebiblemente pequeñas, Pascal percibe el habitáculo de una fauna viva que reproduce en esta escala vertiginosamente reducida nuestros animales terrestres.

Y en un insecto de este reino hace percibir nuevamente las mismas visiones. Es la prosecución, familiar para un espíritu geométrico, de una progresión decreciente sin cesar.

El infinito de inmensidad, concebido también como una extensión repetida sin límite, sobrepasaba sucesivamente a todo, sin dejar nada más allá. El infinito de la pequeñez abandona progresivamente todo, nada persiste en él. Fuera del infinito de la inmensidad y en medio del infinito de la pequeñez está la nada.

Dado que la naturaleza nos ofrece el espectáculo de las inmensidades astronómicas pobladas por moléculas de dimensiones inimaginablemente pequeñas, pero sin igual frecuencia, el filósofo observaría que los cálculos que plantea el universo requieren números cuya magnitud nos confunde. Y sin embargo, esta naturaleza parece finita, tanto en lo gigantesco como en lo ínfimo.

De este modo, aquél concluiría:

El espíritu de Dios se solaza en lo innumerable, pero no se evade jamás de lo finito.

La imaginación humana intenta en vano el asalto de lo innumerable. Pronto cae extenuada. Para eludir este desafío ha creado el infinito y lo continuo.

El infinito, este infinito de fuente puramente humana, es la piedra de toque de la razón, que había creído encontrar en él un servidor cómodo y sumiso. Los números irracionales, llamados vulgarmente "inconmensurables", es decir, el continuo obtenido al aplicar a los números racionales (las fracciones) la idea de una sucesión infinita de alteraciones de amplitud cada vez menos sensible, los infinitamente pequeños introducidos con el cálculo diferencial y el cálculo integral de Leibniz y Newton, las sucesiones infinitas convergentes, todas estas formas diversas con las cuales, en diversas oportunidades el infinito ha hecho una entrada diferente cada vez en las matemáticas, ha revelado la pobreza de la lógica de su tiempo, esa misma lógica que los lógicos de entonces tenían un mecanismo infalible para producir verdades seguras.

Y en cada oportunidad, la lógica debió buscar laboriosa y penosamente, por tanteos durante largo tiempo ciegos, las reglas complementarias que le faltaban.

No fue mediante soberbias visiones a priori sino en la escuela de los fracasos y los éxitos analizados unos y otros en sus causas, que la lógica ha aprendido, modestamente, humildemente, las reglas del razonamiento justo en esas cuestiones nuevas para ella.

Lo racional, en matemáticas como en otros lados, se vuelve a templar periódicamente en lo empírico para adquirir fuerzas que no puede hallar en si mismo.

La ciencia, inclusive en estas matemáticas que parecen ser su refugio en materia de certidumbre, ya no se presenta ante nuestros ojos como la construcción inquebrantable edificada sobre la roca, con materiales que desafían la eternidad, enriquecida sin cesar por bases y dependencias nuevas, pero siempre definitivas.

La ciencia es un barco que navega sobre un mar en movimiento. La ola que lo alcanza no está petrificada, sino que ondula y se propaga, cediendo su lugar a la siguiente. Pero, y esto es lo esencial, el navío flota y avanza en la dirección deseada, arrojando en su ruta el lastre de los conocimientos caducos o falsos y volviendo a cargarse de adquisiciones nuevas. En tal sentido renunciamos al sueño ingenuo y vano

de llegar alguna vez a la ribera de una causalidad original y única.

RELACIONES Y FUNCIONES

Este tema es relevante considerando que estos conceptos son usados en diversas disciplinas científicas que el hombre a cultivado (geometría, física, estadística, programación lineal y economía etc.) y debido a que estos conceptos son la base de todo el cálculo y se da casi en todas las carreras, utilizaremos estas herramientas para ensayar una integración con la Fe en cierto nivel. No es extraño encontrar las relaciones existentes entre dos objetos, por ejemplo hablamos que el área de un círculo esta en función de su radio, en física observamos que el espacio recorrido por un móvil a velocidad constante está en función al tiempo, en estadística tenemos que la media está en función con los valores que toma n variables. Etc, en realidad no terminaríamos de enumerar las diversas formas de relaciones que existen en cada disciplina, pero estas funciones tuvieron que ser primero relaciones, también escuchamos que la vida cristiana debe ser una vida de constante relación con Cristo y el significado que tiene en el rigor matemático y en el lenguaje cristiano es semejante.

ASPECTO PRACTICO

Las actividades que proponemos a continuación se basan en el principio de que para aprender eficazmente, el alumno necesita participar de los acontecimientos al revés de ser apenas espectador, pues la experimentación puede brindar oportunidades para el descubrimiento y formulación de leyes y propiedades.

RELACIONES

DEFINICION.- Sean A y B dos conjuntos diferentes del vacío decimos que el conjunto R_1 es una relación binaria de A en B , si R_1 es un subconjunto del producto de $A \times B$.

Sean los enunciados:

- ⇒ "X es mayor que y"
- ⇒ "X es más simpático que y"
- ⇒ "x fue creado el día y"
- ⇒ "x es diferente de y"

Todos estos enunciados implican cierta relación.

Partiremos de un ejemplo matemático:

Sea $A = \{2,3,4,6\}$ y $B = \{4,6,8\}$

Describir la relación "x es igual a y"

A*B	2	3	4	6
4	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(6;4)
6	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(6;6)
8	(2;8)	(3;8)	(4;8)	(6;8)

$$\Rightarrow R_1 = \{(4,4), (6,6)\}$$

Pero podemos relacionar también aspectos de la vida cristiana. Ejemplo: Utilizando los días de la creación establecemos con la clase un sistema gráfico para la representación de la siguiente relación. "x fue creado el día y"

	DOM.	LUN.	MAR.	MIER.	JUEV.	VIER.	SAB.
VEGETACION							
SOL-LUNA ESTRELLAS							
CIELO, MARES TIERRA SECA							
GUARDO SANTIFICO Y BENDIJO							
DIA Y NOCHE							
ANIMALES TERRESTRES HOMBRE Y MUJER							
PAJAROS PECES							

El hecho nuevo en este modelo es que lleva al alumno a establecer registro de sus observaciones en forma de tablas y gráficos a la vez recordar los días de la creación.

Existen varios tópicos que se pueden integrar con la fe en este tema de relaciones, además de esto el mismo significado de los símbolos en relaciones ya por si tiene su significado en la vida cristiana y se puede graficar.

RELACIONES MATEMATICAS MAS USUALES

	SIMBOLO	INTERPRETACION
Relación de Igualdad	=	Relación de uno con nuestros semejantes
Relación de orden menor estricto.	<	Relación del Hombre Con Dios.
Relación de orden mayor estricto	>	Relación de Dios con el hombre.
Relación de Orden	≤ ≥	Relación con nuestros hermanos y líderes de Iglesia.
Relación de Pertenencia	∈	La relación que debe tener un cristiano con Cristo.
Relación de Inclusión	⊂	Relación del cristiano con la iglesia

FUNCIONES

Las funciones son el resultado de las relaciones y esta es hija orgullosa del número y del espacio. Considerando que este tópico se presenta en el nivel secundario y superior y por experiencia notamos que los estudiantes tienen problemas en la interpretación de los gráficos porque lo ven algo extraño al día a día de ellos y esto porque no lo relacionamos con las experiencias diarias tampoco con la vida cristiana.

El punto de inicio para explicar lo relacionado a funciones comienza con el concepto de función que esperamos pasar a nuestros alumnos.

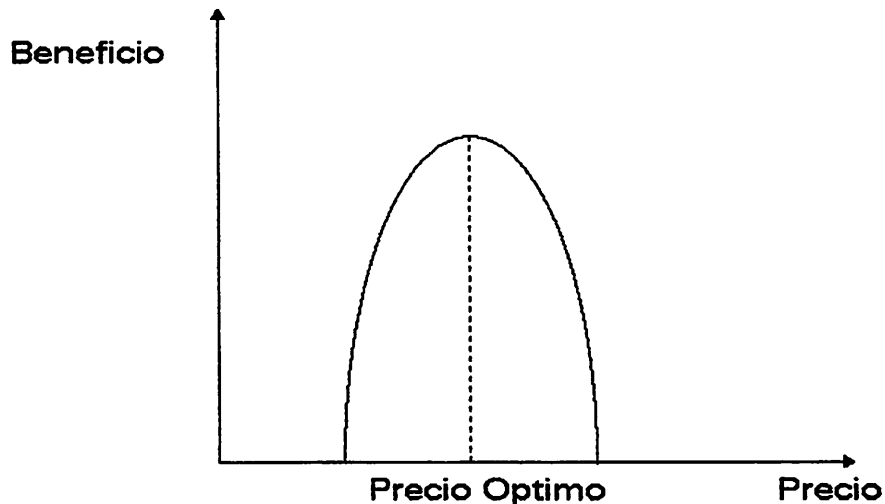
DEFINICION

Función es una ley o asociación entre dos conjuntos que a cada elemento del primer conjunto se asocia un único elemento del otro. Intuitivamente una función es una especie de maquina en el cual colocamos un cierto dato (el elemento del primer conjunto) y ella actúa sobre este dato y nos da una respuesta que depende de el (elemento del segundo conjunto).

ACTIVIDAD

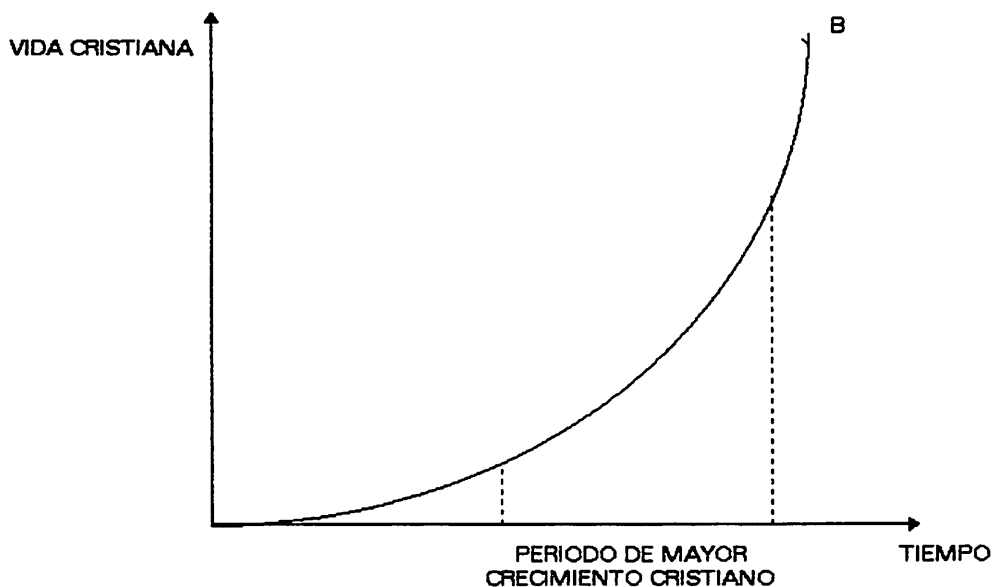
Trabajando con funciones en \mathbb{R}^2 podemos pedir a nuestros alumnos que grafiquen mediante funciones su comportamiento en la vida espiritual e interpreten; esto es, después de haber estudiado todas las funciones. Tenemos la certeza que los alumnos no podrán olvidar las clases de funciones.

Ejemplo:



Este gráfico muestra el efecto que el precio de mercado de un artículo tiene sobre el beneficio total del fabricante de acuerdo con el gráfico. El beneficio será menor si el precio del mercado es muy bajo o muy alto. El hecho de que el gráfico tenga una cúspide sugiere que hay un precio óptimo de venta en el que el beneficio del fabricante será máximo.

ACTIVIDAD



Este gráfico representa el crecimiento de la vida cristiana en relación al tiempo que tiene como cristiano cierta persona B.

Se nota que este cristiano tuvo un periodo de crecimiento rápido.

ACTIVIDAD

Otra actividad que puede traer doble beneficio sería pedirle al alumno que represente su vida espiritual mediante gráficos de funciones y también que grafique como le gustaría que sea.

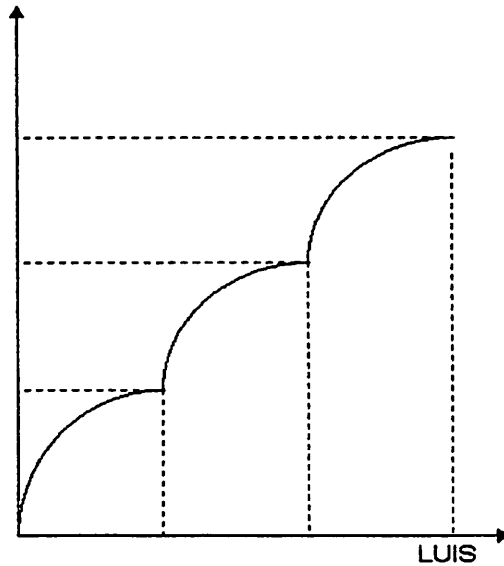
Pondremos algunos ejemplos que creemos didácticos.

**LA VIDA ESPIRITUAL DEL
ALUMNO FUE ASI**

ALUMNO LUIS

$$f(x) = [x] + \sqrt{x - [x]}$$

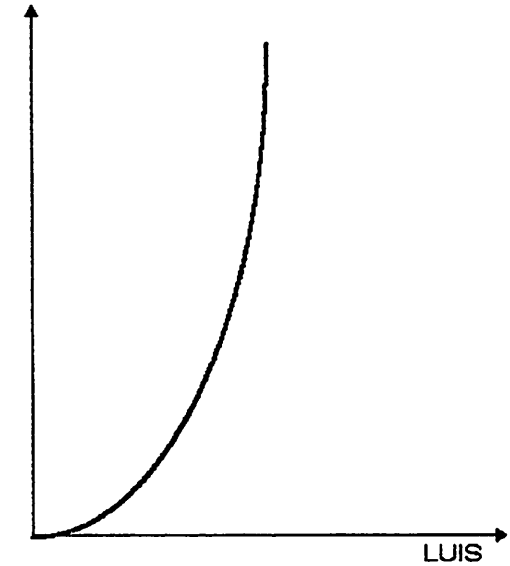
VIDA CRISTIANA



ASI QUISIERA QUE SEA

$$f(x) = x^2, x \geq 0$$

VIDA CRISTIANA

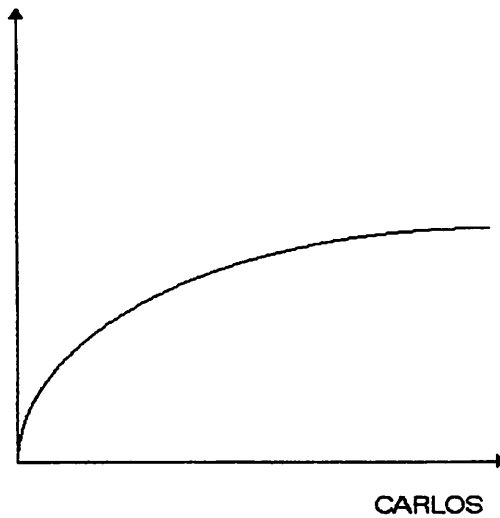


La primera función máximo entero representa que en la vida cristiana de Luis tuvo algunos altibajos, pero a él le gustaría que sea una función cuadrática ascendente.

ALUMNO CARLOS

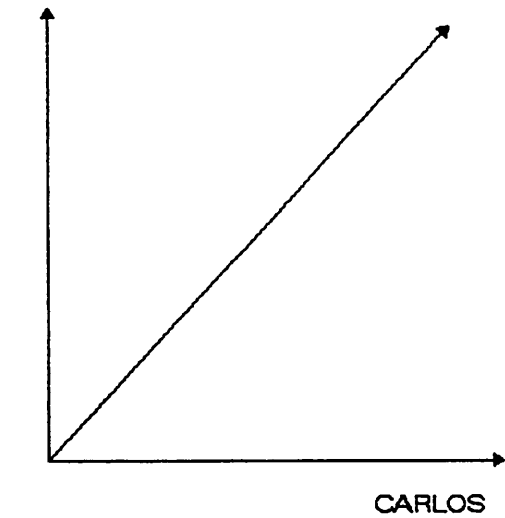
$$f(x) = \sqrt{x}$$

VIDA CRISTIANA



$$f(x) = x; x \geq 0$$

VIDA CRISTIANA

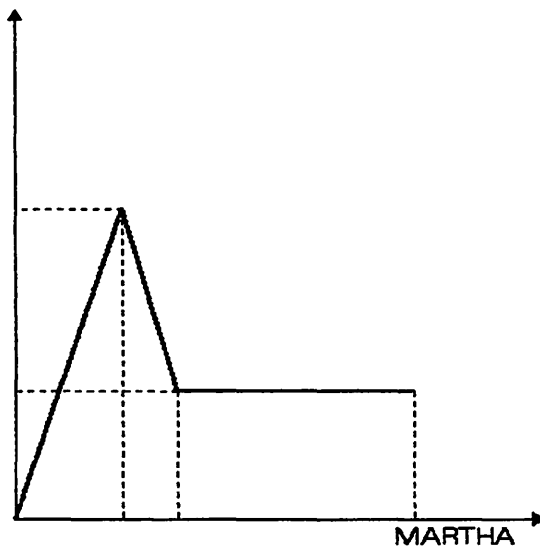


El alumno Carlos analiza su vida espiritual y lo representa con una función raíz cuadrada, es decir que su crecimiento es muy lento, pero le gustaría que su vida sea una función lineal.

ALUMNA MARTHA

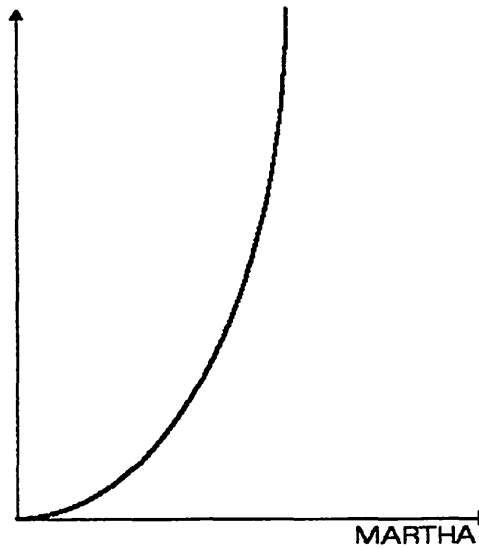
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1; & \frac{1}{2} < x \leq 3 \\ 8-x; & 3 < x \leq 6 \\ 2; & 6 < x < 10 \end{cases}$$

VIDA CRISTIANA



$$f(x) = x^2; x \geq 0$$

VIDA CRISTIANA

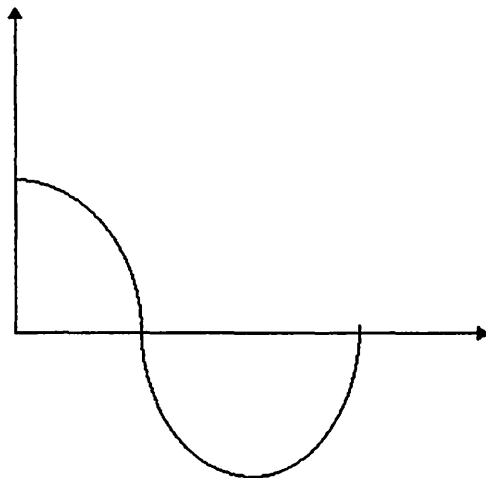


La vida de Martha fue muy accidentada seguro nació en un hogar cristiano por eso tuvo un rápido crecimiento de niña y esto lo representa tres funciones lineales unidas, pero ella desea que su vida sea una función cuadrática.

ALUMNA SILVIA

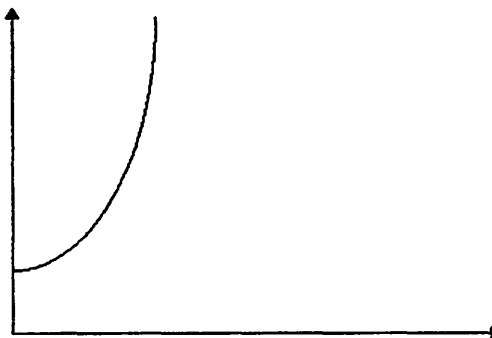
$$f(x) = \cos x$$

VIDA CRISTIANA



$$f(x) = 2^x; x \geq 0$$

VIDA CRISTIANA



Silvia es una alumna que también tuvo una vida cristiana con ciertas caídas pero también se levanto como demuestra la función Coseno y quisiera que sea una función exponencial.

CONCLUSIONES

- Para integrar la Fe con la enseñanza de la Matemática se debe unir esfuerzos porque tenemos la convicción que se puede encontrar el derrotero.
- Es necesario ubicar al estudiante en la Cosmovisión Cristiana antes de enseñar relaciones y funciones. Para esto ayudará el tema del infinito que proponemos.
- El lenguaje que usa la matemática sirve para relacionar situaciones concretas con entes matemáticos.
- El aspecto gráfico es esencial para enseñar el tema de relaciones y funciones.
- El alumno debe ser capaz de construir e interpretar los gráficos, considerando que las situaciones presentadas deben ubicarse en el universo más próximo del alumno.
- El alumno debe participar de los acontecimientos y no ser mero espectador, la participación puede abrir oportunidades para descubrir otros aspectos.
- Es necesario que el profesor de Matemática utilice siempre medios gráficos para representar cualquier situación u operación matemática.
- Para que se de la integración Fe y Matemática debe darse en un contexto de equipo, es decir se debe formar un grupo interdisciplinar con colegas de materias de ciencias de varios países
- El grado de integración que se de en la mente del alumno mucho depende de la habilidad e inteligencia del maestro. El maestro debe tener un amplio conocimiento de aspectos cristianos, estos conocimientos serán los recursos y herramientas y se utilizara en el momento preciso.
- La matemática es un océano inagotable de conocimientos lo que indica que existe material para explorar e integrar con la Fe.

BIBLIOGRAFIA

- Betz, Charles H. *Técnicas de Enseñanza*, ACES, Buenos Aires - Argentina, 1994.
- La Biblia. Versión Reina Valera, 1995.
- Gabba, Pablo J. *Matemática para Maestros*, Editora Marymar, Buenos Aires - Argentina 1980.
- Hoffmann, Laurence *Calculo Aplicado*, Mc. Graw-Hill, Mexico 1983.
- Lázaro, Moisés. *Relaciones y Funciones de R en R* , Publicaciones Moshera, Lima - Perú, 1995.
- Lázaro Moisés. *Limites y Continuidad*, Publicaciones Moshera, Lima - Perú, 1996.
- Pearcey, Nancy y Thaxton Charles *The Soul of Science*, Crossway Books, USA, 1995.